导数概念

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 (导数)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(\Delta x+x_0)-f(x_0)$; 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

- 若此极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

- 导数定义的不同形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{和} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 导数定义的不同形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad 和 \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内任意都可导，即 $\forall x\in I$，都对应一个导数值，此对应关系构成一个函数，称为原函数 $y=f(x)$ 的导函数，记为 y', $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

- 导数定义的不同形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{和} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内任意都可导，即 $\forall x\in I$，都对应一个导数值，此对应关系构成一个函数，称为原函数 $y=f(x)$ 的**导函数**，记为 y'，$f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.
- 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f'(x_0)$ 即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数.

例 4

求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 4

求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　任取一自变量 x, 其导数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

例 4

求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 任取一自变量 x, 其导数

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}
\end{aligned}
$$

例 4

求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　任取一自变量 x, 其导数

$$
\begin{aligned}
f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= \cos x,
\end{aligned}
$$

例 4

求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　任取一自变量 x, 其导数

$$
\begin{aligned}
f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= \lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= \cos x,
\end{aligned}
$$

即 $(\sin x)'=\cos x$.

定义 (左导数与右导数)

在导数的定义中, 分别记单侧极限为

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$
$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

分别称 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左导数、右导数.

- 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件时左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

例

判断函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

解

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0. \end{cases}$$

解

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

左导数

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

解

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0. \end{cases}$$

左导数

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h}=-1.$$

右导数

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=1.$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 故 $f'(0)$ 不存在, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数不存在.

随堂练习

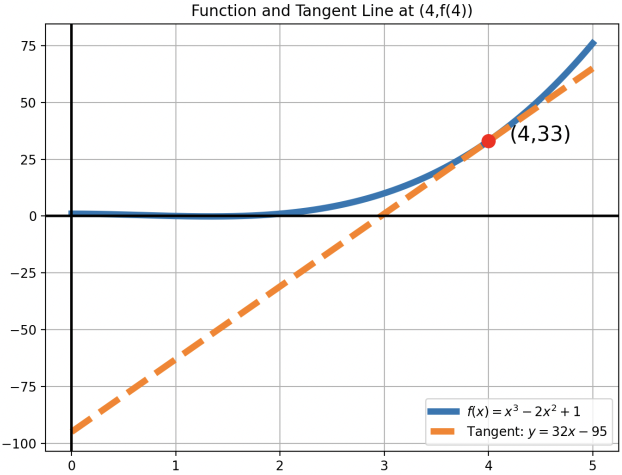
$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x>0 \end{cases}$，计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数.

随堂练习

$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x>0 \end{cases}$, 计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数.

$$f'_-(0)=0, \quad f'_+(0)=\infty.$$

- 导数的几何意义：$f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.



从导数出发计算曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线及法线

- $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率为 $f'(x_0)$，由点斜式，对应的切线方程为
$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

- 若 $f'(x_0)\neq 0$，法线 **(经过 $(x_0,f(x_0))$ 且与切线垂直的直线)** 的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，对应的法线方程为
$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例 8

求等边双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 处的切线的斜率, 并写出该点处的切线方程和法线方程.

解　$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, 由导数的几何意义知道, 所求切线的斜率为

$$k_1 = y'|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

解　$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, 由导数的几何意义知道, 所求切线的斜率为

$$k_1 = y'|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

根据点斜公式写出切线方程

$$y - 2 = -4(x - \frac{1}{2}),$$

整理得到 $4x + y - 4 = 0$.

解　$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, 由导数的几何意义知道, 所求切线的斜率为

$$k_1 = y'|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

根据点斜公式写出切线方程

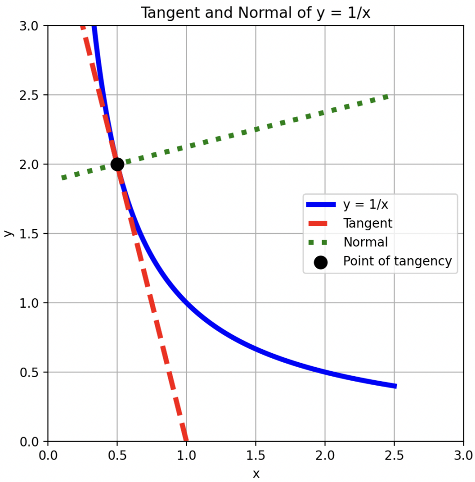
$$y - 2 = -4(x - \frac{1}{2}),$$

整理得到 $4x + y - 4 = 0$.

所求法线方程的斜率为 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{4}$, 法线方程为

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}),$$

即 $2x - 8y + 15 = 0$.


Tangent and Normal of y = 1/x
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x
y = 1/x
Tangent
Normal
Point of tangency

推论 9 (可导必连续)

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 则函数在该点处必连续.

证明.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数为常数 A, 即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

证明.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数为常数 A, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$

故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha,$$

其中 α 为 Δx 趋于 0 时的无穷小.

证明.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数为常数 A, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$

故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha,$$

其中 α 为 Δx 趋于 0 时的无穷小. 因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot A+\Delta x\cdot\alpha\right)=0.$$

$\square$

推论 (可导必连续)

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 则函数在该点处必连续.

- **函数 $y=f(x)$ 在 x 处连续, 能否推出它在该点处可导?**

推论 (可导必连续)

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 则函数在该点处必连续.

- **函数 $y=f(x)$ 在 x 处连续, 能否推出它在该点处可导?**
  - **$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处.**

作业

- 抄写教材 Page 75, 导数定义
- 教材习题 2-1: 4; 6; 13; 17.